DS n°8 : Polynômes, fractions rationnelles, équivalents – Corrigé

Noté sur 120 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/85
(85 points suffisent pour avoir 20).

Exercice 1 : Fractions rationnelles

/6

1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3}{(X+1)(X^2-2X-3)}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(Il faut une étape 1 ici)

Le dénominateur se réécrit $(X+1)(X^2-2X-3) = X^3-X^2-5X-3$. Alors la division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$X^3 = 1 \times \left(X^3-X^2-5X-3\right) + X^2+5X+3$$

et donc

$$\frac{X^3}{(X+1)(X^2-2X-3)} = 1 + \frac{X^2+5X+3}{(X+1)(X^2-2X-3)}$$

Le dénominateur se factorise en

$$(X+1)(X^2-2X-3) = (X+1)^2(X-3)$$

Enfin, on décompose la fraction de degré strictement négatif :

$$\frac{X^2+5X+3}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{-\frac{11}{16}}{X+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{27}{16}}{X-3}$$

Ainsi, la DES recherchée est

$$\frac{X^3}{(X+1)(X^2-2X-3)} = \boxed{1 + \frac{-\frac{11}{16}}{X+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{27}{16}}{X-3}}$$

/6

2) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3+X+1}{X^4+2X^2+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(Pas d'étape 1 ici).

Le dénominateur se factorise ainsi : $X^4+2X^2+1 = (X^2+1)^2$. Or, on remarque que (par une division euclidienne par exemple) :

$$X^3+X+1 = X(X^2+1)+1$$

et donc

$$\frac{X^3+X+1}{X^4+2X^2+1} = \frac{X(X^2+1)+1}{(X^2+1)^2} = \boxed{\frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}}$$

Il s'agit bien de la DES recherchée.

/8

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Un calcul de DES donne : $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{X} + \dfrac{-1}{X+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{X+2}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Analyse asymptotique

/4,5 **1)** Déterminer la limite de la suite $x_n = n\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

On a
$$x_n = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$
Or, comme $\dfrac{2}{n-1} \to 0$, on a
$$\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$$
si bien que
$$x_n \sim \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n-1} = \frac{n}{n-1} \sim 1$$
Ainsi, $x_n \to \boxed{1}$

/4,5 **2)** Déterminer un équivalent simple de $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

On a
$$u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1$$
Or, $\dfrac{1}{n}\ln n \to 0$ par croissances comparées, et donc (par composition à droite)
$$e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \boxed{\frac{1}{n}\ln n}$$

/4 **3)** Déterminer un équivalent simple de $v_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)$.

On remarque que
$$v_n \to \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$
et donc (comme $\sqrt{3} \neq 0$), on a $v_n \sim \boxed{\sqrt{3}}$

/5 **4)** Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent simple de $w_n = \dbinom{n+r}{r}$.

On a
$$w_n = \binom{n+r}{r} = \frac{(n+r)!}{r!n!} = \frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}{r!}$$
Or, r étant fixé, pour tout $q \in [\![1, r]\!]$, on a
$$n+q \sim n$$
et donc par produit,
$$\frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}{r!} \sim \boxed{\frac{n^r}{r!}}$$

Problème : Polynômes divisibles par leur dérivée seconde

Le but du problème est d'étudier les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde. Les polynômes sont donc pris dans $\mathbb{C}[X]$.

Partie A : Étude de cas particuliers

/3 **1)** Quels sont les polynômes de degré 2 divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ un polynôme de degré 2. Alors $P'' = 2a$. Ainsi,
$$P = P'' \times \left(\frac{X^2}{2} + \frac{b}{2a}X + \frac{c}{2a}\right)$$
et donc $P'' \mid P$. Finalement, tout polynôme de degré 2 est divisible par son polynôme dérivée seconde.

/11 **2)** Montrer qu'un polynôme P de degré 3 est divisible par son polynôme dérivée seconde si et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$, tels que : $P = a(X-c)^3 + b(X-c)$.

- Montrons le sens réciproque : si $P = a(X-c)^3 + b(X-c)$ avec $a \neq 0$, alors $P'' = 6a(X-c)$. On remarque alors que $P = P'' \times \left(6(X-c)^2 + \dfrac{b}{6a}\right)$, donc $P'' \mid P$.

- Montrons le sens direct : soit P de degré 3 tel que $P'' \mid P$. Comme $\deg P'' = \deg P - 2 = 1$, on sait que P'' se réécrit sous la forme factorisée :

$$P'' = \alpha(X-c) \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

En intégrant deux fois, on trouve :

$$P' = \frac{\alpha}{2}(X-c)^2 + \beta \qquad \text{avec } \beta \in \mathbb{C}$$

et enfin

$$P = \frac{\alpha}{6}(X-c)^3 + \beta X + \gamma \qquad \text{avec } \gamma \in \mathbb{C}$$

Or, on peut écrire $\beta X + \gamma = \beta(X-c) + c\beta + \gamma$. En posant $\delta := c\beta + \gamma$, on a donc

$$P = \frac{\alpha}{6}(X-c)^3 + \beta(X-c) + \delta$$

Or, comme $P'' \mid P$, on sait que $X - c \mid P$, ou encore que $P(c) = 0$. On en déduit que $\delta = 0$. On a donc

$$P = a(X-c)^3 + b(X-c) \qquad \text{avec } a := \frac{\alpha}{6} \neq 0 \quad \text{et} \quad b := \beta$$

D'où le résultat voulu.

3) Soit P un polynôme de degré n ($n > 2$) divisible par son polynôme dérivée seconde. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP''$.

a) Quel est le degré de Q ? Quel est son coefficient dominant ?

/4,5

On a

$$\begin{aligned}\deg P &= \deg(QP'') \\ &= \deg Q + \deg P'' \\ &= \deg Q + \deg P - 2 \qquad (\text{car } \deg P \geq 2)\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg Q = \boxed{2}$.

On pose λ le coefficient dominant de Q. Le terme dominant de P est de la forme aX^n avec $a \in \mathbb{C}^*$. On en déduit que le terme dominant de P'' est de la forme $an(n-1)X^{n-2}$. Ainsi, comme $P = QP''$, on a par produit des coefficients dominants,

$$a = an(n-1)\lambda$$

et donc, comme $a \neq 0$, on a $\lambda = \boxed{\dfrac{1}{n(n-1)}}$

b) On suppose ici que Q admet une racine double, notée c. c est alors racine de P. Soit r son ordre de multiplicité dans P.
En écrivant $P = (X-c)^r R$, avec $R(c) \neq 0$, puis en calculant P'', montrer que $r = n$. Quelle est alors la forme du polynôme P ?

/10

On peut donc poser $P = (X-c)^r R$ avec $R(c) \neq 0$. Alors

$$P' = r(X-c)^{r-1}R + (X-c)^r R'$$

et donc

$$P'' = r(r-1)(X-c)^{r-2}R + 2r(X-c)^{r-1}R' + (X-c)^r R''$$

De plus, comme $\deg Q = 2$ et que Q admet c comme racine double, on a $Q = \lambda(X-c)^2$ avec $\lambda = \dfrac{1}{n(n-1)}$ par la question précédente. Ainsi

$$\begin{aligned}QP'' &= \lambda r(r-1)(X-c)^r R + 2\lambda r(X-c)^{r+1}R' + \lambda(X-c)^{r+2}R'' \\ &= P = (X-c)^r R\end{aligned}$$

En divisant par $(X-c)^r$, on obtient

$$\lambda r(r-1)R + 2\lambda r(X-c)R' + \lambda(X-c)^2 R'' = R$$

En évaluant en c, on a

$$\lambda r(r-1)R(c) = R(c)$$

et comme $R(c) \neq 0$, on en déduit que $\lambda r(r-1) = 1$. Ainsi

$$r(r-1) = \frac{1}{\lambda} = n(n-1)$$

Comme $n > 2$, on a en particulier $r(r-1) \neq 0$ et donc $r \geq 2$. Or, la fonction $f : x \mapsto x(x-1)$ est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, donc est injective. Ainsi comme on a $f(r) = f(n)$ avec $r, n \in [2, +\infty[$, on en déduit que $\boxed{r = n}$.

Ainsi, $P = (X-c)^n R$ avec $\deg P = n$. On en déduit que $\deg R = 0$, donc que R est constant non nul. En posant $R = \mu \in \mathbb{C}^*$, on en déduit que P s'écrit sous la forme

$$P = \boxed{\mu(X-c)^n} \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad c \in \mathbb{C}$$

PARTIE B : Résolution d'un problème simplifié

Soit $n \geq 2$ un entier. On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ s'il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \deg P = n \\ (ii) & P \text{ est unitaire} \\ (iii) & P = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)P'' \end{cases}$$

Dans toute cette partie, P_n désigne un polynôme solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ *(on supposera provisoirement qu'un tel polynôme existe).*

4) À partir de la relation (iii), et en utilisant la formule de Leibniz, démontrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la relation :

$$(X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kXP_n^{(k+1)} = (n(n-1) - k(k-1))\, P_n^{(k)}$$

/6

Par (iii), on a

$$\begin{aligned} P_n^{(k)} &= \frac{1}{n(n-1)}\left((X^2-1)P''_n\right)^{(k)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(X^2-1)^{(p)}(P''_n)^{(k-p)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(X^2-1)^{(p)} = \begin{cases} X^2-1 & \text{si } p=0 \\ 2X & \text{si } p=1 \\ 2 & \text{si } p=2 \\ 0 & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

- Si $k \geq 2$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} P_n^{(k)} &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{p=0}^{2}\binom{k}{p}(X^2-1)^{(p)}(P''_n)^{(k-p)} + 0 \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left((X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kXP_n^{(k+1)} + \frac{k(k-1)}{2}2P_n^{(k)}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\boxed{n(n-1)P_n^{(k)} - k(k-1)P_n^{(k)} = (X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kXP_n^{(k+1)}}$$

- Si $k = 1$, on constate que

$$P_n^{(1)} = \frac{1}{n(n-1)}\left((X^2-1)P''_n\right)^{(1)} = (X^2-1)P_n^{(2)} + 2XP_n^{(1)}$$

et donc la formule $(*)$ obtenue ci-dessus reste valide si $k=1$.

- Si $k = 0$, on constate que la formule $(*)$ est encore vraie. On en déduit de même la relation demandée.

5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ (y compris $k=0$), on pose $R_k = (X^2-1)^{k-1}P_n^{(k)}$, et, pour $k \neq n$, on pose $a_k = \dfrac{1}{n(n-1)-k(k-1)}$.

Déduire de la question précédente l'égalité $R_k = a_k R'_{k+1}$.

/3,5

On a

$$R_{k+1} = (X^2-1)^k P_n^{(k+1)}$$

et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$R'_{k+1} = 2kX(X^2-1)^{k-1}P_n^{(k+1)} + (X^2-1)^k P_n^{(k+2)}$$

(cette formule reste vraie pour $k=0$ puisque $k(X^2-1)^{k-1} = \dfrac{0}{X^2-1} = 0$). Ainsi, pour $k \neq n$,

$$\begin{aligned} a_k R'_{k+1} &= \frac{(X^2-1)^{k-1}}{n(n-1)-k(k-1)}\left(2kXP_n^{(k+1)} + (X^2-1)P_n^{(k+2)}\right) \\ &= (X^2-1)^{k-1}P_n^{(k)} \qquad \text{par la question précédente} \\ &= R_k \end{aligned}$$

6) **a)** En déduire : $R_0 = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} R_n^{(n)}$.

/4

Par la question précédente, on a $R_k = a_k R'_{k+1}$ et donc $R_k^{(k)} = a_k R_{k+1}^{(k+1)}$. Ainsi, par récurrence immédiate,

$$R_0 = R_0^{(0)} = a_0 R_1^{(1)} = a_0 a_1 R_2^{(2)} = \cdots = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} R_n^{(n)}$$

b) En déduire $P_n = \dfrac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\left((X^2-1)^{n-1}\right)^{(n)}$.

On pourra remarquer que $n(n-1)-k(k-1)=(n-k)(n+k-1)$).

/6 On remarque d'une part que

$$R_0 = (X^2-1)^{-1} P_n^{(0)} = \frac{P_n}{X^2-1}$$

et d'autre part que

$$R_n = (X^2-1)^{n-1} P_n^{(n)}$$

Or, comme $\deg P_n = n$ et que P_n est unitaire, par conséquent le terme dominant de P_n est X^n, et donc celui de $P_n^{(n)}$ est $n!X^0 = n!$. Ainsi, $P_n^{(n)} = n!$. On en déduit par la question précédente que

$$\frac{P_n}{X^2-1} = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \left((X^2-1)^{n-1} n!\right)^{(n)}$$

D'où

$$P_n = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} n! \times (X^2-1)\left((X^2-1)^{n-1} n!\right)^{(n)}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$a_0 a_1 \cdots a_{n-1} n! = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}$$

Or, pour tout $k \neq n$, on a

$$a_k = \frac{1}{n(n-1)-k(k-1)} = \frac{1}{(n-k)(n+k-1)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} a_k &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)(n+k-1)} \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k-1}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right)\left(\prod_{\ell=n-1}^{2n-2} \frac{1}{\ell}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\prod_{\ell=1}^{2n-2} \frac{1}{\ell}\right)\left(\prod_{\ell=1}^{n-2} \ell\right) \\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{1}{(2n-2)!}(n-2)!
\end{aligned}$$

D'où

$$a_0 a_1 \cdots a_{n-1} n! = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}$$

et donc

$$\boxed{P_n = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\left((X^2-1)^{n-1} n!\right)^{(n)}}$$

On peut montrer après beaucoup de calculs que P_n est effectivement solution de $(\mathcal{P}'_n)$. On pourra utiliser ce résultat sans le démontrer dans la partie suivante.

PARTIE C : Résolution du cas général

Soit $n \geq 2$ un entier. On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ s'il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \text{il existe } Q \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P = QP'' \\ (ii) & Q \text{ possède deux racines distinctes} \\ (iii) & \deg P = n \end{cases}$$

7) a) Si P est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$, et si Q désigne le polynôme défini par (i), montrer qu'il existe deux nombres complexes a et b, avec $a \neq 0$, tels que : $Q(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}(X^2-1)$.

/7 Comme Q possède deux racines distinctes, il existe $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p \neq q$ tels que

$$Q = \lambda(X-p)(X-q)$$

avec $\lambda = \dfrac{1}{n(n-1)}$ le coefficient dominant de Q par la question **a)** . Alors, pour tous $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
Q(aX+b) &= \lambda(aX+b-p)(aX+b-q) \\
&= a^2\lambda\left(X + \frac{b-p}{a}\right)\left(X + \frac{b-q}{a}\right)
\end{aligned}$$

Pour avoir la forme demandée, il faut choisir a, b pour que 1 et -1 soit racines de $Q(aX+b)$. On peut donc par exemple résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{b-p}{a} = -1 \\ \dfrac{b-q}{a} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b-p = -a \\ b-q = a \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = p \\ a-b = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{a = \dfrac{p-q}{2}} \\ \boxed{b = \dfrac{p+q}{2}} \end{cases}$$

et on a bien $a \neq 0$ car $p \neq q$. Ainsi, pour les valeurs a, b ci-dessus, on a bien

$$Q(aX+b) = a^2\lambda(X-1)(X+1) = \boxed{\frac{a^2}{n(n-1)}\left(X^2-1\right)}$$

b) Montrer que, alors, le polynôme $R = P(aX+b)$ vérifie la relation : $R = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R''$.

/4

On remarque que $R = P(aX+b)$ vérifie $R'' = a^2P''(aX+b)$. De plus,

$$\begin{aligned} R &= P(aX+b) \\ &= Q(aX+b)P''(aX+b) \\ &= \frac{a^2}{n(n-1)}\left(X^2-1\right)\frac{1}{a^2}R'' \\ &= \boxed{\frac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R''} \end{aligned}$$

8) Résoudre complètement le problème $(\mathcal{P}_n)$ à partir de la solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ trouvée à la question **6)**.

/14

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit P une solution de $(\mathcal{P}_n)$. Alors par la question 7, le polynôme $R = P(aX+b)$ vérifie

- $\deg R = \deg P = n$
- $R = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R''$

Cependant, ce polynôme R n'est pas nécessairement unitaire donc n'est pas a priori solution de $(\mathcal{P}'_n)$. Cela étant, si on note $\mu \in \mathbb{C}^*$ son coefficient dominant, on remarque que

$$S := \frac{1}{\mu a^n}R = \frac{1}{\mu a^n}P(aX+b)$$

est un polynôme unitaire qui vérifie également $\deg S = n$ et

$$S = \frac{1}{\mu a^n}\left(\frac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R''\right) = \frac{1}{n(n-1)}(X^2-1)S''$$

Ainsi, S est solution de $(\mathcal{P}'_n)$, donc par la question 6, on a

$$S = P_n = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\left((X^2-1)^{n-1}n!\right)^{(n)}$$

On en déduit que

$$P(aX+b) = \mu a^n S = \mu a^n P_n(X)$$

En particulier, (en composant à droite par le polynôme $\dfrac{X-b}{a}$),

$$P\left(a\left(\frac{X-b}{a}\right)+b\right) = \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right)$$

d'où

$$P(X) = \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right)$$

Synthèse. Réciproquement, montrons que tout polynôme P de la forme suivante est solution de $(\mathcal{P}_n)$:

$$P(X) = \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) \qquad \text{avec } a, \mu \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

Comme $\deg P_n = n$, on a bien $\deg P = n$ donc (iii) est vrai. De plus, on a

$$P''(X) = \mu a^{n-2}P''_n\left(\frac{X-b}{a}\right)$$

On pose

$$Q := \frac{a^2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)^2 - 1\right)$$

Montrons que $QP'' = P$. On a

$$\begin{aligned} &QP'' \\ &= \frac{a^2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)^2-1\right) \times \left(\mu a^{n-2}P''_n\left(\frac{X-b}{a}\right)\right) \\ &= \mu a^n \times \frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)^2-1\right)P''_n\left(\frac{X-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Or, $P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) = \frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)^2 - 1\right) P_n''\left(\frac{X-b}{a}\right)$, donc

$$QP'' = \mu a^n \times P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) = P$$

Et donc on a bien $QP'' = P$ avec

$$Q := \frac{a^2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)^2 - 1\right)$$

si bien que (i) est vérifié. Enfin,

$$Q = \frac{1}{n(n-1)}\left((X-b)^2 - a^2\right) = \frac{1}{n(n-1)}(X-b-a)(X-b+a)$$

d'où Q possède pour racines $b+a$ et $b-a$, qui sont bien distinctes car $a \neq 0$. Ainsi (ii) est vérifié.

Conclusion. Les solutions de $(\mathcal{P}_n)$ sont donc les polynômes de la forme :

$$\boxed{P(X) = \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) \qquad \text{avec } a, \mu \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}}$$

9) Conclure : Quels sont tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

/9

Faisons une disjonction de cas sur le degré :

- Si $P = 0$, alors $P'' = 0$ divise bien P. Ainsi $0 \in \mathcal{S}$.
- Si $\deg P \in \{0,1\}$, alors $P'' = 0$ ne divise pas P qui est non nul. Pas de solution dans ce cas.
- Si $\deg P = 2$, alors par la question 1, $P \in \mathcal{S}$.
- On suppose $\deg P = n > 2$. Si P est solution, le quotient Q de la division de P par P'' est de degré 2.
  - Si Q possède une racine double, alors par la question 3.b), ce polynôme s'écrit :
  $$P = \mu(X-c)^n \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad c \in \mathbb{C}$$
  et on constate que réciproquement, tout polynôme de cette forme est bien solution.
  - Si Q possède deux racines distinctes, alors P est solution de $(\mathcal{P}_n)$ et donc s'écrit
  $$P = \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) \qquad \text{avec } a, \mu \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{0\} &\cup \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P = 2\} \\ &\cup \{\mu(X-c)^n \mid n \geq 3,\ \mu \in \mathbb{C}^*,\ c \in \mathbb{C}\} \\ &\cup \left\{ \mu a^n P_n\left(\frac{X-b}{a}\right) \;\middle|\; a, \mu \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C},\ n \in [\![3, +\infty[\![\right\}\end{aligned}$$